

SULL'ATTRITO DI SECONDA SPECIE

FATTE

DAL PROF. LUIGI PACINOTTI

E DAL

DOTT. ENRICO GALLI

Estratto dal Cimento
Fasc. Marzo-Aprile 1846.

PISA

PRESSO R. VANNUCCHI



Circa le dottrine sul trasporto con vetture, o con locomotive e vagoni si trova la scienza in difetto di dati per calcolare l'attrito tra il cerchio della ruota e il piano sottoposto. Non si ha nei trattati di meccanica applicata un' esatta tavola relativa a quest' attrito che viene detto di seconda specie colla quale si possa calcolare quanto è la resistenza al rotolamento tra certe determinate sostanze. E quello che è di peggio regnano dottrine ed esperienze contraddittorie relativamente al rapporto che ha questa resistenza col raggio del cilindro. Il Coulomb dietro pochissime esperienze stabili che tal resistenza stesse in ragione inversa di quel raggio: lo seguì la gran folla de' meccanici per la ben meritata fiducia che sì illustre fisico si era procurata in tante cose sperimentali, per modo che quando il Dupuit (Essai et experiences sur le tirage des voitures. Paris 1837) volle introdurre l'altra dottrina che l'attrito di seconda specie è in ragione della radice quadrata del raggio del cilindro poco fu creduto. Si aggiunsero a farli opposizione alcuni risultati sperimentali di Morin sulle ruote delle vetture, e perciò Poncelet (Introduction à la mécanique industrielle. Paris 1841), sebbene sparga dubbio sulla teoria di Coulomb propone di ritenerla finchè esperienze più dirette e preci-

se abbian tolto interamente l'incertezza che esiste sulla vera legge della resistenza al rotolamento (l. c. pag. 506). Che noi sappiamo nulla è stato di poi fatto su questo soggetto; si è forse maggiormente accreditata la dottrina del Coulomb per avere Arturo Morin ripubblicando nel 1843 la sua opera *Aide Memoire de mecanique pratique* asserito *la résistance opposée par les routes parvées ou en empierrement solide au mouvement des voitures... est sensiblement proportionnelle à la pression et inversement proportionnelle au rayon des roues*. Moltissimo all'opposto preme toglier le incertezze su questo argomento, che compone uno degli elementi necessari a stabilire la miglior forma dei veicoli. Certamente il limite del vantaggio che si ha nell'ingrandire le ruote de vagoni non è lo stesso, dietro la teoria del Coulomb, e dietro quella del Dupuit: nè può questo dato trascurarsi oggi che l'avanzamento delle strade rotaje, di tante speranze per la facilitazione del commercio, si fa dipendere dalla migliore e più studiata costruzione dei vagoni, e delle locomotive. E molto meno credevamo dover tenere occulte queste nostre esperienze perchè come si vedrà ci guidano a dover preferire la opinione del Dupuit a quella del Coulomb, e perciò a quella generalmente adottata. Trattandosi adunque di dover trarre una tal conclusione non abbiám creduto, anche per il dovuto riguardo alle contrarie opinioni, poterci dispensare dalle descrizioni le più minute su metodi d'esperienza, sebbene si tratti di apparati semplicissimi; e molto meno dal riferire genuini ed in gran numero i risultati sperimentali. Divideremo il lavoro in due parti nella prima raccogliendo l'esperienze eseguite su cilindri ben lavorati al tornio che rotolavano sovra piani anch'essi bene addirizzati e livellati; nella seconda l'esperienze fatte sovra piani più o meno levigati e cedevoli, come possono offrire le comuni strade, con ruote tolte da veicoli in uso, e lavorate con meno esattezza, e di dimensioni maggiori, e cerchiato di ferro.

PARTE I.

Ecco il metodo adottato in queste Esperienze. Sopra due regoli di una certa sostanza con due faccie bene spianate, e collocati parallelamente e in modo che queste si trovino in un medesimo e perfetto piano orizzontale mediante il livello a bolla d'aria; abbiamo posato uno dopo l'altro diversi cilindri della medesima o di differente sostanza, come pure di differente raggio, ridotti al tornio, e puliti egualmente che i regoli con molta diligenza; ed abbiamo procurato che l'asse del cilindro, preso in esperimento, fosse esattamente in direzione perpendicolare agli spigoli dei regoli. Al medesimo si è addossato uno o più fili, o cordoncini di seta (secondo il carico che dovevan sostenere), alle cui estremità si sono attaccati dei pesi eguali, che riuniti insieme e al peso del cilindro rappresentano la pressione esercitata da questo sul piano dei due regoli. Aumentando in seguito gradatamente uno dei pesi, finchè non venga impresso al cilindro un movimento lento per quanto può ottenersi, e continuato, abbiamo preso riscontro del pesetto addizionale come esprime la resistenza d'attrito sotto quella certa pressione. E poichè i risultati, che si ottenevano presentavansi discordi, e molto equivoci, abbiamo creduto necessario istituire più esperienze non cangiando che la sola linea di contatto. Divisa pertanto la base del cilindro in quattro parti, abbiamo voluto sottoporre ad esperimento quattro linee di contatto differente in rapporto alla superficie cilindrica; queste sono inoltre state variate anche riguardo alla superficie del piano. Da tutti i risultati di siffatte ripetute esperienze si è dedotto dei valori medii nel concetto, che siano più meritevoli di fede di quello che potrebbe essere un semplice resultamento dato da una sola esperienza. L'opportunità di questo metodo si sente tanto più, in quanto che i risultati delle singole espe-

rienze si trovano il più delle volte molto differenti. Abbiamo usata eziandio la precauzione di farne un egual numero tanto mettendo in moto il cilindro in un senso, quanto in senso inverso, stantechè così vengono a correggersi gli errori nel supposto che i pesi esprimenti le pressioni fossero pochissimo differenti, quantunque sempre verificati per eguali con la bilancia. Infatti chiamata a quella differenza, e detto p il pesetto da aggiungersi al più grande $P + a$, p' quello da aggiungersi al più piccolo P , e indicato con la x il vero attrito, che non conosciamo (ed ora come innanzi chiameremo impropriamente attrito il pesetto, che vince l'attrito stesso con un braccio di leva eguale al raggio) si avrebbe da una parte sotto la pressione $2P$, $x = p + a$, dall'altra sotto la pressione $2(P + a)$, $x' = p' - a$: ma gli attriti x x' sotto le pressioni $2P$ e $2(P + a)$ non possono differire fra loro sensibilmente per la piccolezza di a dunque prendendo la media, otterremo

$$x = \frac{p+a+p'-a}{2} = \frac{p+p'}{2}; \text{ laonde si desume, che gli errori,}$$

in cui s'incorre, prendendo pesi differenti, verranno corretti dalla natura del metodo stesso. Questa cautela, la quale da un lato sembra infruttuosa, perchè abbiamo sempre, come è stato detto pocanzi, eguagliati i pesi con la bilancia, da altra parte offre molto vantaggio, poichè non essendo per lo più omogenei i cilindri, e specialmente quelli di legno, è occorso centrarli con l'aumento di un pesetto nella base, dalla parte più leggera, procurando a tentativi, che essi stessero fermi in qualunque posizione: il che senza tale espediente non era dato ottenere neppure a una intensa pressione. Ora bene s'intende, che questa centrazione riuscirà in generale imperfetta, infatti il cilindro può stare in equilibrio in tutte le posizioni, sebbene la direzione della forza del suo peso non passi per l'asse, e ciò avviene ogni qual volta essendoli molto vicino, da quella parte ove si trova rispetto all'asse medesimo dimi-

nuisce l'attrito senza superarlo; onde siamo appunto nel caso dei pesi diseguali.

Un'altra cosa non deve passare inavvertita, ed è che abbiain potuto osservare, che lasciando riposare sui regoli per qualche tempo il cilindro già caricato, il pesetto addizionale, che deve aumentarsi fino al punto, da imprimere moto, diveniva tale da motivare nel cilindro medesimo una celerità più grande di quella, che questo avrebbe acquistata con l'adattato pesetto necessario allorchè vi fosse lasciato per pochi istanti. La causa di ciò sembra essere la forza di coesione, l'azion della quale si faccia sentire con maggiore energia fra le particelle della materia, quando maggiore è il tempo, che loro viene permesso per attrarsi le une con le altre. Volendo noi quindi determinare la misura della resistenza d'attrito, come di quel semplice contrasto, che oppongono al moto le piccole prominenze di una superficie incastrate nei piccoli vuoti dell'altra, abbiamo creduto di dovere sperimentare senza dare lungo riposo al cilindro, onde con lentezza fatto rotolare in senso opposto a quello, cui tende il pesetto, finchè non fosse pervenuto al punto dal quale si doveva partire, e quivi trattenutolo in riposo per pochi istanti, l'abbiamo lasciato liberamente esposto all'azione del pesetto addizionale onde scoprire se questo era l'idoneo per una tenue velocità.

Premesse queste avvertenze, passeremo a riportare ordinati in tavole tutti i valori numerici che abbiamo ottenuti, cui sono aggiunti i corrispondenti ridotti a un kilog. di pressione, ritenendo che ogni peso ed ogni lunghezza si riferiscono al kilogrammo, e al metro: inoltre che quelle che qui si dicono resistenze d'attrito sono i pesetti necessarii a muovere i cilindri, quantunque propriamente debbano andar riferiti al medesimo braccio di leva per avere i rapporti delle resistenze stesse.

Prima rammenteremo ancora che dai risultati registrati nelle seguenti tavole non è stato tolto il valore della

rigidezza dei cordoncini di seta, e ciò per due ragioni, l'una perchè per determinarlo conveniva entrare in ricerche piuttosto complicate, l'altra perchè quelli che abbiamo usati essendo di molta flessibilità, non si sarebbe mostrato sensibile questo divario. Daltronde siccome i risultati medesimi dovrebbero ancora essere un poco accresciuti a causa del braccio di leva aumentato dal raggio dei cordoncini, bisognerebbe prendere in considerazione anche questo cambiamento, e così verranno in parte a compensarsi gli errori. Ed all'effetto che possa ciascuno apprezzare in qualche modo le differenze, che produrrebbero queste correzioni, è stato posto nella prima colonna il numero dei cordoncini stessi, non mancando d'indicare nelle osservazioni i loro diametri.

TAVOLA I.

Cilindri d'Abete su regoli dello stesso legno.

Num. dei cor- donc.	Raggio dei Cilindri	Pres- sioni	Attriti Corrispon- denti	Attriti per un kilogrammo	Medie per un kilogrammo
	m				
3f	0,0065	0,3	0,00511	0,01703	
5f	0,0065	1	0,01566	0,01566	0,01634
5f	0,0123	1	0,01160	0,01160	
6f	0,0123	2	0,02548	0,01274	0,01217
1c	0,0174	2	0,01986	0,00993	
1c	0,0174	4	0,03732	0,00933	0,00963
1c	0,0242	4	0,03170	0,00792	
1c	0,0242	6	0,04669	0,00778	0,00785
1C	0,0305	6	0,0491	0,00818	
1C	0,0305	10	0,0882	0,00882	
1C	0,0305	14	0,1165	0,00832	
1C	0,0305	18	0,1655	0,00919	
1C	0,0305	22	0,1929	0,00877	0,00865
2C	0,0305	26	0,2856	0,01098	
1C	0,0620	6	0,0355	0,00591	
1C	0,0620	10	0,0633	0,00633	
1C	0,0620	14	0,0822	0,00587	
1C	0,0620	18	0,1148	0,00637	
1C	0,0620	22	0,1483	0,00674	0,00624
1C	0,0620	26	0,1763	0,00678	
1C	0,0895	9	0,03442	0,00382	
1C	0,0895	11	0,04681	0,00426	
1C	0,0895	13	0,05378	0,00414	
1C	0,0895	15	0,05945	0,00396	
2C	0,0895	25	0,11877	0,00475	
1C	0,0895	26	0,12649 ⁽¹⁾	0,00486 ⁽¹⁾	0,00486 ⁽¹⁾
2C	0,0895	30	0,14283	0,00476	
2C	0,0895	33	0,14651	0,00444	
2C	0,0895	45	0,19047	0,00423	0,00429
3C	0,0895	65	0,31514	0,00479	
1C	0,1970	11	0,02930	0,00266	
1C	0,1970	13	0,03907	0,00300	
1C	0,1970	15	0,04284	0,00285	
1C	0,1970	18	0,04660	0,00259	
2C	0,1970	25	0,06856	0,00274	
1C	0,1970	26	0,11520 ⁽¹⁾	0,00443 ⁽¹⁾	0,00443 ⁽¹⁾
2C	0,1970	33	0,09542	0,00289	0,00279
3C	0,1970	65	0,21257	0,00327	
1C	0,2775	18	0,04593	0,00255	
2C	0,2775	25	0,06658	0,00266	
1C	0,2775	26	0,10650 ⁽¹⁾	0,00409 ⁽¹⁾	0,00409 ⁽¹⁾
2C	0,2775	30	0,07713	0,00257	
2C	0,2775	33	0,08136	0,00247	
2C	0,2775	45	0,13035	0,00289	0,00263
3C	0,2775	65	0,20759	0,00319	

TAVOLA II.

*Cilindri di pietra della Gonfolina levigati a smeriglio su
regoli ruvidi della medesima pietra.*

Num. dei cor- donci.	Raggi dei cilindri	Pres- sioni	Attriti corrispondenti	Attriti per un kilogrammo	Medie per un kilogrammo
	m				
1C	0,0316	10	0,0357	0,00357	0,00357
2C	0,0316	16	0,0806 (*)	0,00504 (*)	
1C	0,0316	10	0,0422 (*)	0,00422 (*)	
1C	0,0316	6	0,0241 (*)	0,00402 (*)	
1C	0,0650	10	0,0206	0,00206	
1C	0,0650	22	0,0444	0,00202	0,00204
1C	0,0985	22	0,0378	0,00172	0,00172

I medesimi cilindri su lastre d'ottone ben pulite.

1C	0,0316	4	0,0116	0,00290	
3C	0,0316	10	0,0312	0,00312	0,00301
1C	0,0650	10	0,0218	0,00218	
3C	0,0650	20	0,0486	0,00243	0,00230
1C	0,0985	20	0,0392	0,00196	0,00196

TAVOLA III.

Cilindri d' Abeto su lastre d' ottone ben pulite.

Num. dei cor- donc.	Raggi del cilindri	Pres- sioni	Attriti corrispon- denti	Attriti per un kilogrammo	Medie per un kilogrammo
1f	0,0030	0,05	0,01241	0,02482	0,02482
3f	0,0065	0,6	0,00846	0,01410	
5f	0,0065	1,	0,01507	0,01507	0,01458
2f	0,0123	0,4	0,00370	0,00925	
5f	0,0123	1	0,00879	0,00879	
5f1c	0,0123	2	0,02133	0,01066	0,00956
5f	0,0174	1	0,00792	0,00792	
1c	0,0174	2	0,01654	0,00827	
1c	0,0174	4	0,03045	0,00761	0,00793
1c	0,0242	2	0,01309	0,00654	
1c	0,0242	4	0,02799	0,00699	0,00676
1c	0,0305	5	0,02441	0,00488	
2c	0,0305	9	0,04043	0,00449	0,00468
2c	0,0620	10	0,03795	0,00379	
3c	0,0620	14	0,05743	0,00410	
1C	0,0620	22	0,14482	0,00658	0,00482
3c	0,0975	17	0,05786	0,00340	
1C	0,0975	25	0,07501	0,00300	0,00320
1C	0,1970	29	0,09600	0,00331	0,00331
1C	0,2775	26	0,07080	0,00271	
1C	0,2775	38	0,10202	0,00268	0,00269

Varie cose sono da notarsi sopra i risultati delle precedenti tavole.

1.^o Che i numeri della prima colonna appartengono a fili o cordoncini di seta secondochè vanno uniti alla lettera *f* o alla *c*, essendo il diametro del cordoncino eguale a 0m,001 quando la *c* è piccola, ed eguale a 0m,003 quando la *C* è grande.

2.^o Che ciascun numero della quarta colonna proviene da otto o sedici esperienze, secondo la diversità che si mostrava nei risultati, eseguite colla semplice variazione della linea di contatto, o del senso del moto ad eccezione dei numeri della terza tavola, dei quali la maggior parte sono stati desunti da quattro sole esperienze, per risultar queste molto regolari.

3.^o Che tanto nelle pressioni relative a esperienze su piccoli raggi quanto in quelle su grandi vi è sempre stato incluso il peso del cilindro, poichè per quanto tenue si fosse pei piccoli tuttavia non deve esser trascurato a causa della piccolezza delle pressioni corrispondenti.

4.^o Che ne' cilindri di legno le fibre erano in direzione parallela all'asse, e nei regoli in direzione longitudinale in guisa che nel fregamento venivano ad incrociarsi ad angolo retto.

5.^o Che nei regoli di legno ciascuna delle due faccie di fregamento, era larga 0m,050, in quelli di pietra 0m,051, nelle lastre d'ottone 0m,056, talchè essendo tanto tenue la loro differenza, volendo stabilire i rapporti degli attriti al variare della sola sostanza, potremo paragonare i numeri delle tavole, quand' anche fosse grande (che d' altronde sappiamo esser trascurabile) l' influenza della maggiore o minore estensione di contatto.

6.^o Che i numeri della tavola I. a cominciare dal primo fino a tutti quelli appartenenti al raggio 0m,062 inclusivamente, derivano da esperienze nelle quali si è considerato come equivalente all'attrito quel pesetto, il più piccolo, che nel modo che abbiamo esposto, cioè senza riposo del cilindro, era atto ad imprimere un moto lento, facendogli in seguito percorrere tutta la lunghezza dei regoli. Siccome però abbiamo osservato, che questo moto poteva essere proseguito per un certo spazio ora più ora meno grande, fermandosi il cilindro prima di compire l'intera lunghezza de' regoli a causa dei tratti delle superficie più scabri, o meno rotondeggianti, ci è sembrato uti-

le far delle esperienze anche sotto questo punto di vista, primieramente perchè in questo caso pure l'attrito deve considerarsi come vinto: in secondo luogo poi perchè così saremmo pervenuti a scoprire, se si verificassero tuttora le leggi esistenti sui risultati delle prime esperienze. I rimanenti numeri contenuti nella tavola I. corrispondono a questo secondo modo d'esperimentare ad eccezione di quei tre distinti col segno ¹, che sono stati cercati col primo metodo, perchè non dovendo confondere gli uni cogli altri, attese l'inequali loro circostanze, nello stabilire la legge relativa al diametro si abbiano dei numeri anche per i tre ultimi cilindri; e di più perchè si possa apprezzare il divario prodotto dalla diversità dei due metodi.

7.^o Che avendo scoperto che per ambe le strade, si giungeva alle medesime conseguenze, come vedremo in appresso prendendo in esame i risultati soprascritti, l'esperienze delle altre tavole sono state tutte condotte secondo il primo metodo.

8.^o Che le medie per un kilogrammo, incluse nell'ultima colonna, sono state desunte dai numeri della colonna anteriore col mezzo di medie aritmetiche fra quelli corrispondenti al medesimo raggio eccettuando solamente l'ultimo o i due ultimi quando fossero piuttosto grandi in confronto dei superiori. La ragione di ciò è che quei numeri più degli altri si riferiscono a stato diverso delle superfici, che è quello della loro alterazione, come meglio si vedrà in appresso. Nella terza tavola poi destinata particolarmente per la legge dei diametri, avendosi pochi risultati su ciaschedun raggio, le medie per un kilogrammo sono l'esatte medie aritmetiche dei numeri posti di contro, perchè l'aumento dipendente dall'alterazione delle superfici deve pochissimo risentirsi dentro quei limiti di pressione così ristretti; d'altronde totalmente impossibile sarebbe stato decidere fra tanti pochi numeri quale ne fosse l'esuberante. Lo stesso deve dirsi della tavola II.

9.^o Che i numeri della seconda tavola indicati (¹) si riferiscono ad un accidentalità, che è stata molto proficua per la conferma della legge dei diametri. Per ora ci limiteremo ad avvertire, che i regoli di pietra essendo molto ruvidi in confronto delle superfici dei cilindri, quello di raggio 0,0316 si è guastato nella superficie sotto la pressione di 16 kilogrammi, talche quei numeri (¹) sono stati ottenuti a superficie alterata nell'ordine, in cui sono scritti; riserbandoci all'opportunità indicare più minutamente tale evento, e le conseguenze che ne sono derivate.

Desiderando specialmente dedurre le leggi, che regolano la forza d'attrito, passeremo ora a prendere in esame comparativo i valori dei numeri contenuti nelle precedenti tavole. Per potere facilmente stabilire queste leggi, conviene variare uno alla volta quegli elementi che entrano a costituirlo. Essi si possono restringere al numero di tre cioè il raggio, la pressione, e lo stato delle superfici, che dipende dalla qualità della sostanza del corpo, dalla sua omogeneità, dal modo della lavorazione ec.

Le superficie della medesima sostanza sono state poste per quanto sia stato possibile nelle medesime circostanze rispetto alla qualità, alla lavorazione ec. poichè la maggior parte dei cilindri d'abete furono tratti dal medesimo tronco d'albero, e tutti ridotti poi al tornio con eguale accuratezza. Una simile cautela fu presa anche riguardo a quelli di pietra, che venne procurato formarli della stessa qualità, e rotondarli diligentemente al tornio, adoprandolo dello smeriglio, perchè fossero portati a un certo grado di levigatezza.

Ora se si ferma l'attenzione in una delle prime tavole, sulla colonna, che contiene gli attriti corrispondenti a un kilogrammo, si scorge che quando non cangia il raggio, al crescere della pressione i numeri differiscono poco fra loro, ora in più ora in meno. Ma se all'aumentare di quella crescesse, o diminuise in corresponsività

la forza d' attrito corrispondente a un kilogrammo , dovrebbero i numeri andar sempre crescendo o decrescendo: ciò che non accade riproducendosene spesso alcuni ben poco diversi in maggioranza o diminuzione anche a pressioni molte discoste . Queste alternative debbono dunque dipendere da circostanze incidenti ed accessorie , come sarebbero le piccole variazioni di rotondità nel contatto , l'ineguaglianza di porosità nelle diverse parti del corpo e tante altre , le quali è impossibile rimuovere affatto , comunque efficaci fossero le nostre cure per diminuirle . Le speculazioni di questo genere vanno sempre più o meno soggette a simili inconvenienti , per cui accade che alcune volte non si ravvisa nessuna uniformità nei risultati , che si presentano irregolari , e discordi , e perciò ben lontani dal nostro scopo, che è quello di potere per mezzo di un ragionato confronto arrivare a scoprire le leggi regolatrici delle cose che imprendiamo a studiare. Tornando al nostro oggetto diremo, chè, se i numeri relativi a energiche pressioni sono in generale un poco più grandi di quelli delle altre , ciò si spiega benissimo col riflettere che i corpi sotto quelle si alterano sensibilmente nelle loro superficie : e questo come è chiaro , segue tanto più presto al crescere della pressione quanto più il corpo è suscettibile di deformazione , e quanto più è piccolo il raggio , poichè essendo allora la pressione ripartita sopra una minore quantità di punti nell' estensione di contatto che varia perchè si tratta di corpi fisici , viene più presto ad esser superata la forza la quale tiene avvinte le particelle nelle loro primitive posizioni . Posto ciò se ora si considera come variata la sostanza , di cui son formati i cilindri e i regoli , e cangiando tavola , si passa ad altri di eguale o di differente sostanza fra loro , si vede , che restano sempre applicabili le conseguenze risultanti dalle riflessioni già fatte . E siccome i numeri della quinta colonna provengono dai quozienti dei rispettivi della quarta per quelli della terza , sia l' uno o l' altro il me-

todo che si è tenuto nello sperimentare possiamo concludere essere la forza d'attrito direttamente proporzionale alle pressione, qualunque sia la sostanza delle superfici che si fregano. Riterremo però che vi è un limite, dentro il quale si mantiene nella sopraccennata ragione, e dopo aumentando essa sensibilmente succede per così dire uno sbilancio, che non può che corrispondere al punto di alterazione delle superfici.

Rimane ora a considerare, come varia la forza d'attrito al variare del solo diametro. Per potere a colpo d'occhio discernere la legge, che segue, presenteremo qui appresso una tavola, ove sono contenuti i prodotti delle medie pei raggi, e quelli per le radici quadrate dei raggi, ben inteso che queste medie sono precisamente quelle già vedute nelle tavole trascorse. In tal modo sarà facilissimo render palese se i risultati concordano più con la legge assunta da Coulomb, e riprodotta da Morin, o sivvero con quella ritenuta da Dupuit.

Qui sonosi aggiunte anche l'esperienze fatte con due cilindri di ferro a diametro differente sovra lastre d'ottone; e fa duopo avvertire che i cilindri erano ottimamente lavorati al tornio, e con superficie bene splendente.

TAVOLA IV.

Sul rapporto tra la resistenza e il diametro del cilindro.

Cilindri d'Abete su regoli dello stesso legno.

Raggi dei cilindri	Medie per un kilogr.	Prodotti delle me- die per i raggi	Prodotti delle me- die per le radici
0,0895	(1) 0,00429	0,000384	0,001283
0,1970	(1) 0,00279	0,000330	0,001238
0,2775	(1) 0,00263	0,000730	0,001385
0,0065	0,01633	0,000106	0,001316
0,0123	0,01217	0,000150	0,001349
0,0174	0,00963	0,000161	0,001271
0,0242	0,00783	0,000189	0,001211
0,0305	0,00865	0,000264	0,001511
0,0620	0,00624	0,000387	0,001554
0,0895	0,00486	0,000435	0,001454
0,1970	0,00443	0,000873	0,001966
0,2775	0,00409	0,001435	0,002154

Cilindri di pietra su regoli ruvidi di pietra.

0,0316	0,00337	0,000123	0,000634
0,0650	0,00204	0,000132	0,000520
0,0985	0,00172	0,000169	0,000540

Cilindri di pietra su lastre d'ottone.

0,0316	0,00301	0,000095	0,000535
0,0650	0,00230	0,000149	0,000586
0,0985	0,00196	0,000193	0,000615

Cilindri d'abete su lastre d'ottone.

0,0030	0,02482	0,000074	0,001360
0,0065	0,01438	0,000094	0,001175
0,0123	0,00956	0,000118	0,001060
0,0174	0,00793	0,000138	0,001049
0,0242	0,00676	0,000164	0,001052
0,0305	0,00468 (1)	0,000143 (1)	0,000817 (1)
0,0620	0,00482	0,000299	0,001200
0,0975	0,00320	0,000312	0,000998
0,1970	0,00331	0,000652	0,001469
0,2775	0,00269	0,000746	0,001417

Cilindri di ferro su lastre d'ottone.

0,0287	0,000799	0,000023	0,000135
0,0412	0,000760	0,000031	0,000154

Prima d'ogni altra cosa è d'uopo avvertire 1.^o: che i tre primi numeri accennati col segno ⁽¹⁾ spettano al secondo metodo d'esperimentazione, quindi debbono essere (come altra volta fu detto) distinti dagli altri, e perciò non assoggettati che a confronto particolare. 2.^o Che riguardo ai numeri relativi alle pietre, non entrano a costituire le medie quelli che sono stati ottenuti a superficie alterata.

Con un semplice sguardo rivolto alle due ultime colonne immantinente si rileva che i prodotti pei raggi vanno tutti crescendo al crescere dei raggi medesimi, ciò che non accade dei prodotti per le radici, ben inteso che siano posti a confronto quelli inclusi nella medesima casella, perchè altrimenti si cangerebbe contemporaneamente un altro elemento quello cioè della sostanza dei corpi, cui appartengono le superficie in contatto. Di più, varii numeri della quarta colonna pochissimo diversificano fra loro. Che se avviene, che qualche volta i prodotti per le radici si succedono crescenti, discostandosi perciò alcun poco dall'eguaglianza, si deve riflettere, che il rapporto di due raggi qualunque considerato nel senso del maggiore al minore essendo più grande di quello delle loro radici, maggiormente si debbono allontanare dalla eguaglianza i numeri della terza che i corrispettivi crescenti dell'ultima colonna. Attese queste riflessioni, e le alternative, cui sono soggetti i prodotti per le radici, non potendo attribuire queste irregolarità che a cause eventuali, siamo condotti a concludere, che essi debbano soddisfare alla legge d'essere eguali. I due risultati 0,000634, 0,000520 sembrano offrire eccezione a questo principio, per essere meno tendenti all'eguaglianza dei corrispondenti 0,000123, 0,000132. Mostreremo tale contrarietà non essere che una mera apparenza. I regoli di pietra, benchè della medesima qualità, non erano lisci come le superfici cilindriche per non essere stati preparati con lo smeriglio, ma sibbene ruvidi e assai scabri. Ora nella esperienza rela-

tiva a 16 kilogrammi, è successo che il cilindro di diametro più piccolo ha fatto sentire un continuato scricchiolare; nel medesimo tempo che si vedeva sfregarsi le superfici, e spolvorizzandosi, in molte parti perdere affatto quel grado di levigatezza cui erano ridotte. Quanto sia stata risentita quest'alterazione, si può rilevare ancora dall'esperienze fatte a superficie guasta, che hanno somministrato tutte numeri (già veduti nella tavola II.) più grandi del primo anche sotto pressione più piccola. Varie utili conseguenze si possono dedurre da tale favorevolissimo accidente, 1.^o che gli altri cilindri non avendo sofferto alcun benchè minimo danno sotto il carico di 22 kilogrammi, (pressione anche maggiore) viene in questo modo coll'esperienza a confermarsi pienamente ciò, che razionalmente fu detto riguardo all'alterazione della superficie dipendentemente dall'impiccolimento del diametro, 2.^o che se il numero 0,000634 è eccedente in paragone dei seguenti, tale esuberanza può dipendere dalla medesima alterazione in grado più piccola di quella a sedici kilogrammi, perchè più piccola la forza che preme. La congettura di questa conseguenza si è cangiata in assoluta certezza allorchè tolti i regoli ruvidi, sono state sostituite ad essi due lastre levigatissime, per rimuovere così qualunque corrosione.

Assoggettati quindi nuovamente i cilindri all'esperienza su lastre d'ottone lucide, avendo prima avuto cura di ricondurre il cilindro sfregato al primitivo stato di levigatezza, i numeri ottenuti hanno appunto acquistato la ripromessa regolarità. Al medesimo principio dell'eguaglianza dei prodotti per le radici, porta ancora in un modo incontestabile ed evidentissimo l'esame del quadro dei cilindri d'abete su lastre d'ottone, posto verso la fine dell'ultima tavola, poichè da esso chiaramente ne emerge, che nel passare dal raggio 0m,003 all'altro 0m,2775, cioè ad un circa 92 volte più grande, il prodotto della media pel rag-

gio continuamente aumenta fino a divenire dieci volte maggiore, mentrechè quello per la radice ora aumenta ora diminuisce in maniera che il suo valor più grande non arriva neppure ad essere il doppio del più piccolo. Che se di più non si trascura di rammentare, che il risultato 0,000817 è stato distinto col segno ⁴ perchè apparteneva ad un cilindro di qualità diversa da quella degli altri, per essere a differenza di essi di pasta gialla, e molto untuosa, trascurate che siano le ultime due cifre decimali il maggior divario fra i prodotti per le radici si restringe a sole quattro unità, avendosi 13, 11, 10, 10, 10, 12, 10, 14, 14.

Laonde per l'accordo dei risultati del secondo metodo d'esperimentazione, e per tutte le riflessioni testè fatte, conciliandosi pure i risultati del secondo metodo d'esperimentare, possiamo stabilire che varia la forza d'attrito secondo la ragione inversa della radice quadrata del raggio.

Dunque riunendo in una formula le due leggi alle quali ci hanno guidato i nostri risultati sperimentali, e chiamando F il pesetto, che consideriamo come equiparare l'attrito, P la pressione esercitata sul piano dei regoli, r il raggio del cilindro, f un coefficiente costante per la medesima sostanza, ma variabile dall'una all'altra, potremmo ritenere l'espressione $F = \frac{fP}{\sqrt{r}}$, fatta astrazione dal cambiamento di stato nelle superfici per la deformazione del corpo.

Da questa formula si può trarre il valore della costante f , che non è altro se non che l'attrito di un cilindro di raggio eguale ad un metro sotto una pressione eguale ad un kilogrammo. Se poi nella risultante espressione $f = \frac{F\sqrt{r}}{P}$ si sostituiscono per r e P i loro valori unitamente a quello di F somministrato dall'espe-

rienza, si otterranno i seguenti numeri che stabiliscono una relazione fra le diverse sostanze da noi usate, determinando il valore del loro coefficiente d' attrito al rotolamento.

TAVOLA V.

dei valori del coefficiente d' attrito di seconda specie

<i>Sostanze</i>	<i>valori di f</i>
Cilindri di abete su regoli dello stesso legno .	0,001532
Cilindri di pietra su regoli ruvidi di pietra .	0,000564
Cilindri di ferro su lastre d' ottone	0,000144
Cilindri di abete su lastre d' ottone	0,001198
Cilindri di pietra su lastre d' ottone	0,000579

Determinato il valore di f coi risultati di una sola esperienza, sarà facilissimo ottenere quello dell' attrito di un cilindro di un raggio qualunque r , e sotto una pressione arbitraria P , ben inteso di dover trattare di quelle medesime sostanze che hanno servito per la determinazione della f ; poichè non si dovrà fare altro che moltiplicare la stessa f per la pressione P , e dividere per la radice quadrata del raggio.

Per compire questa prima parte resta ad avvertire che si è riscontrato nelle esperienze suddette verificarsi in generale i seguenti principii.

1.^o Che il logoramento cagionato dal lungo uso delle superfici di contatto non produce alcun sensibile cangiamento sopra i risultati.

2.^o Che non accade il medesimo del logoramento prodotto da pressioni molto intense, il quale può indurre qualche divario; di ciò ne sono una prova i numeri della tavola II. relativi al primo cilindro di pietra, e a 10 kilogrammi di pressione.

3.^o Che non v' influisce sensibilmente lo stato d' umidità o siccità dell' atmosfera.

4.^o Che risulta grandissimo l'effetto delle imperfezioni di rotondità nelle superfici cilindriche.

Da questo principio non solo si rileva, che è assolutamente necessario per ripromettersi qualche regolarità nei numeri, formarle al tornio con molta accuratezza; ma di più quanto è utile sperimentare su varie linee di contatto per non azzardare giudizj impropri.

5.^o Che se invece di addossare al cilindro il cordoncino cui si appendevano i piombi rappresentanti la pressione (come si è fatto in tutte l'esperienze qui esposte), piacesse avvolgerlo una o più volte dopo averlo fissato con una estremità sulla superficie cilindrica, e trarre il cilindro con forza orizzontale tangente all'estremo superiore del diametro verticale, il valore di ciascuno dei numeri risultanti si sarebbe ridotto alla metà. Ciò facilmente si comprende solo che si rifletta essere l'asse di rotazione una linea aderente al contatto e che quindi la forza viene ad agire con un braccio di leva doppio di quello di prima.

Questo pure è stato verificato con un'esperienza, in cui si è adoprato una carrucolina mobilissima (dall'attrito della quale si poteva prescindere), affine di poter così rivolgere la direzione della forza a quella di un peso.

PARTE II.

Sebbene lo scopo delle esperienze surriferite sia quello di offrire dei dati per stabilire certi principj, utili esclusivamente alla pratica, tuttavia esse non hanno con questa che un rapporto indiretto. Ognuno senza dubbio crederà più naturale che le dottrine, le quali abbisognano nelle applicazioni, debbano essere desunte dalle medesime macchine che in quelle si usano, piuttostochè da altre ad esse simili, a bella posta costrutte, e meglio conformate: onde forse non poco sarebbe mancato all'intrapreso lavoro, se neppure una esperienza si fosse fatta sotto un punto di vista così proprio al nostro soggetto.

In qualunque genere di veicoli la resistenza che fa contrasto alla forza destinata a traslocare il carico, si compone di due parti distinte, che sono due attriti di specie diversa: l'uno si genera fra l'anello della ruota, e l'asse intorno cui essa gira; di questo non intendiamo parlare: l'altro si esercita fra il suolo su cui scorre la macchina, e il cerchio della ruota; e questo varia manifestamente secondo la natura del suolo. Sarebbe cosa laboriosissima, voler sottoporre a esperimento tutte le varietà di suoli secondarie per il loro gran numero. Qui dunque non abbiamo fatto, che determinare il valore della resistenza per alcune principali qualità di piani, preparati ad imitazione degli stradali. In queste esperienze abbiamo fatto uso di ruote ordinarie munite di cerchi di ferro, e tratte appunto da carretti e da barrocci. Sono state riunite due a due con un cilindro di legno introdotto a forza negli anelli, e con adattate sbarre trasversali contrastanti le razze, per cui abbiamo reso bene stabile il sistema, affine di determinare il solo attrito di seconda specie col metodo stesso, che si teneva rispetto ai cilindri. Le qualità di suolo che abbiamo scelte come più essenziali, sono le seguenti: un suolo consistente in uno strato di rena di fiume di una certa altezza sopra un fondo ben solido: uno di terra calcata già da gran tempo: uno di smalto: uno coperto di ghiaja di monte ed infine uno lastricato. Per quello arenoso è convenuto fare una tavola separata, onde mostrare il valore diverso della resistenza relativamente a tre strati di diversa altezza. Ad onta, che in queste esperienze si siano scelti con ripetute riprove i pesi più opportuni a muovere lentamente le ruote, pure i numeri delle prime colonne che sono i risultati stessi delle particolari esperienze appariranno non poco irregolari. Ciò non deve far maraviglia, poichè facilmente si concepisce, che questo dipende dall'essere tali ruote non bene rotondeggianti, e dal mancare i piani di orizzontalità o di eguaglianza di scabrosità nei varii punti della loro estensione.

TAVOLA I.

Ruote ordinarie del diametro di 1m,52 con cerchio di ferro largo 0m,041 fatte muovere sopra strati di rena, mantenendo la pressione costantemente eguale a 130k,291.

<i>Strato di rena umida alto 0m,013</i>		<i>Strato di rena asciutta alto 0m,013</i>		<i>Strato di rena asciutta alto 0m,027</i>		<i>Strato di rena asciutta alto 0m,040</i>	
<i>valore della resistenza</i>	<i>affondamento delle ruote</i>	<i>valore della resistenza</i>	<i>affondamento delle ruote</i>	<i>valore della resistenza</i>	<i>affondamento delle ruote</i>	<i>valore della resistenza</i>	<i>affondamento delle ruote</i>
<i>k</i>		<i>k</i>		<i>k</i>			
3,585	0,006	7,000	0,012	15,0	0,024	24,00	0,036
4,462	0,005	11,478	0,010	20,5	0,027	17,00	0,034
6,047	0,006	10,492	0,011	15,5	0,023	19,50	0,034
6,400	0,005	9,616	0,011	15,0	0,027	21,33	0,035
<i>med. = 5,123</i>	<i>med. = 0,005</i>	<i>med. = 9,646</i>	<i>med. = 0,011</i>	<i>med. = 16,5</i>	<i>med. = 0,025</i>	<i>med. = 20,46</i>	<i>med. = 0,035</i>
<i>labbro della rena = 0,001</i>		<i>labbro della rena = 0,005</i>		<i>labbro della rena = 0,010</i>		<i>labbro della rena = 0,013</i>	

TAVOLA II.

Ruote ordinarie del diametro di 1m,52 con cerchio di ferro largo 0m,041 fatte muovere sopra suoli di diverso genere, ritenendo sempre la pressione di 130k, 291.

Terra calcata		Smalto		Ghiaja		Lastrico	
Resultati d'esperienza	medie delle due suc. esp. in senso opp.	Resultati d'esperienza	medie delle due suc. esp. in senso opp.	Resultati d'esperienza	medie delle due suc. esp. in senso opp.	Resultati d'esperienza	medie delle due suc. esp. in senso opp.
3,462		4,462		14,462		2,708	
3,062	3,262	3,293	3,877	14,924	14,693	2,523	2,615
3,123		2,739		14,462		1,862	
3,462	3,293	3,893	3,316	10,000	12,231	3,540	2,701
5,000		3,277		11,000		2,523	
4,616	4,808	4,493	3,885	13,050	12,025	4,893	3,708
2,277		0,558		8,359		1,801	
2,000	2,138	2,462	1,510	9,460	8,909	3,602	2,701
media compl. = 3,375		media compl. = 3,147		media compl. = 11,964		media compl. = 2,931	

Nelle seconde colonne del quadro secondo si trovano le medie fra i due numeri corrispondenti al movimento nei due sensi contrarj, relativo ad uno stesso punto di contatto. L'oggetto di queste medie è quello di mostrare in generale un poco più di regolarità dei numeri delle prime colonne: infatti bene s'intende, che se la differenza di questi è provenuta da mancanza d'orizzontalità nel piano, o da discentramento del sistema, mentre da una parte diminuisce la resistenza, dall'altra aumenta, e così si vengono alquanto a compensare fra loro. Affondandosi le ruote sugli strati di rena, e per condurle nella conveniente posizione, lasciandosi ciascuua dietro un solco con due labbri laterali superiormente sporgenti, si rese necessario che compita un'esperienza dalla parte inalterata, col riempirne i solchi fosse nuovamente preparato lo strato per ripeterla in senso contrario. Quindi siccome in questo caso il suolo non può dirsi in identiche circostanze per le due successive esperienze, (ciò che non accade degli altri, ove non producessi solco veruno) abbiamo creduto inutile affatto prendere le medie fra i numeri della tavola I.; nella quale invece abbiamo sostituito quelli che esprimono l'insinuazione delle ruote nel suolo pei differenti strati. In questi medesimi numeri è ancora compresa l'altezza del labbro di rialzamento, che è registrata al piede di ciascheduna colonna.

Dalla medesima tavola I. vedesi, che crescendo lo spessore dello strato, cresce corrispondentemente il valore della resistenza, ma per gradi sempre più piccoli; poichè passando per tre altezze che stanno fra loro circa come $1 : 2 : 3$ il valor di quella aumenta presso a poco secondo i rapporti $9 : 16 : 20$. Facilmente poi si concepisce, che vi deve essere uno spessore limite, al di sopra del quale devesi mantener costante la resistenza; e il fondo solido non avere altrimenti influenza sul valor della medesima.

Riguardo alla tavola II. si deve avvertire che fu adoprato della ghiaja molta minuta, mentre il pezzo più grande arrivava appena alla grossezza di una noce; e che il lastrico era, come suol dirsi, martellinato. Da questa si scorge, che sul buon lastrico l'attrito è minore, che su gli altri suoli, e che per grandezza crescente ne succedono lo smaltato, quello di terra pestata, che sono presso a poco tutti eguali fra loro, ed infine quello di ghiaja, che ne è circa quattro volte maggiore.

Altre tre tavole che qui appresso seguono, sono state formate per conferma delle leggi relative alle pressioni. Rispetto alla pressione di $k130,291$ per le ruote del diametro $0m,886$, noteremo, che è stata accavallata al cilindro trasverso che collega le ruote una fune, a cui abbiamo attaccato un peso di $50k$ circa; mentrechè relativamente alla pressione di $k270,291$ per le ruote di diametro $1m,52$ ne abbiamo accavallate due attaccando a ciascuna un peso di $50k$: che perciò sebbene si sia scelto il minimo peso adattato a muovere il sistema, tuttavia l'attrito della fune col cilindro deve aver prodotto un certo aumento, che non è stato tolto dai numeri da noi ottenuti. In queste tavole come si è avvertito per la II. sono notate in colonna a parte le medie corrispondenti al movimento ne' due sensi contrari, distintamente dalla media completa.

Media delle due suc. esp. in senso opp.	Media delle due suc. esp. in senso opp.	Media delle due suc. esp. in senso opp.	Media completa
1.431	1.431	1.431	1.431
0.418	0.418	0.418	0.418
1.101	1.101	1.101	1.101
0.818	0.818	0.818	0.818
0.408	0.408	0.408	0.408
0.388	0.388	0.388	0.388
0.338	0.338	0.338	0.338
1.209	1.209	1.209	1.209
0.730	0.730	0.730	0.730
Media completa = 2.851	Media completa = 2.851	Media completa = 2.851	Media completa = 2.851

TAVOLA III.

Ruote ordinarie del diametro di 0m,273 con cerchio di ferro largo 0m,023 fatte muovere sopra un ammattonato arrotato e orizzontale con pressione di 5k,421.

<i>Resultati d'esperienze</i>	<i>medie delle due suc. esp. in senso opp.</i>	<i>Resultati d'esperienze</i>	<i>medie delle due suc. esp. in senso opp.</i>
<i>k</i>		<i>k</i>	
0,114		0,174	
0,100	0,107	0,315	0,244
0,342		0,223	
0,043	0,192	0,117	0,170
<i>media completa = 0,178</i>			

TAVOLA IV.

Ruote ordinarie del diametro di 0m,886 con cerchio di ferro largo 0m,038 fatte muovere sopra un ammattonato arrotato e orizzontale con pressione

<i>di 49k,55</i>		<i>di 130k,291</i>	
<i>Resultati d'esperienze</i>	<i>medie delle due suc. esp. in senso opp.</i>	<i>Resultati d'esperienze</i>	<i>medie delle due suc. esp. in senso opp.</i>
<i>k</i>		<i>k</i>	
0,431		2,308	
0,616	0,523	2,586	2,447
1,401		4,632	
0,616	1,008	1,786	3,209
0,408		2,554	
0,524	0,466	2,154	2,354
0,339		1,339	
1,509	0,924	5,232	3,285
<i>media completa = 0,730</i>		<i>media completa = 2,824</i>	

TAVOLA V.

Ruote ordinarie del diametro di 1m,52 con cerchio di ferro largo 0m,041 fatte muovere sopra un ammattonato arrotato e orizzontale con pressione di

130k,291		di 270k,291	
<i>Resultati d'esperienze</i>	<i>medie delle due suc. esp. in senso opposto</i>	<i>Resultati d'esperienze</i>	<i>medie delle due suc. esp. in senso opposto</i>
k			
3,909		1,431	
1,725	2,817	6,386	3,908
2,739		3,585	
2,493	2,616	1,893	2,739
1,602		6,801	
0,493	1,047	6,663	6,732
2,801		5,493	
1,708	2,254	6,370	5,931
2,216		2,493	
1,862	2,039	3,493	2,993
0,862		2,150	
2,308	1,585	7,000	4,575
1,616		9,708	
0,677	1,146	1,801	5,754
2,739		7,708	
1,370	2,054	5,170	6,439

media completa = 1,945

media completa = 4,884

Per la legge dei diametri si può vedere la tavoletta seguente costruita dietro i risultati delle ultime tre precedenti.

TAVOLA VI.

Ruote con cerchio di ferro sopra ammattonato arrotato.

<i>Raggi</i>	<i>Medie per un kilogrammo</i>	<i>Prodotti delle medie per i raggi</i>	<i>Prodotti delle medie per le radici</i>
0,136	0,03283	0,004465	0,012111
0,443	0,01819	0,008058	0,012093
0,760	0,01650	0,012540	0,014386

Benchè dalle trascorse tavole si possa rilevare il rapporto dell' attrito dipendente dalle diverse sostanze, non ostante crediamo utilissimo aggiungerne un'altra, in cui siano riportati i valori numerici del coefficiente f d' attrito. Essa confrontata con la V. della prima parte, ci mostra, che la miglior riduzione delle superfici fa molto diminuire il valore della resistenza.

TAVOLA VII.

Per il coefficiente d' attrito di seconda specie nelle ruote con cerchi di ferro sopra sostanze differenti.

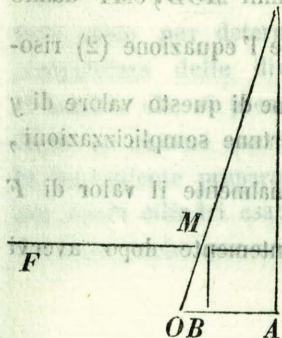
Strato di rena umida . . .	alto	0m,013	0,034270
Strato di rena asciutta . . .	»	0m,013	0,064541
Idem	»	0m,027	0,110401
Idem	»	0m,040	0,136898
Terra calcata			0,022582
Smalto			0,021056
Ghiaja			0,080605
Lastrico			0,019477

Si comprende con facilità che i numeri di questa tavola non sono altro, che i prodotti delle medie complete incluse nelle tavole precedenti per il rapporto della radice del raggio alla pressione. E siccome in queste esperienze al pari di quelle trattate nella prima parte, abbiamo sempre superato l'attrito con un braccio di leva eguale al raggio, e col medesimo braccio trae pure la forza in un veicolo; ne segue che volendo determinare la quantità di forza, che abbisogna a muovere questo veicolo sotto un certo carico, ricorreremo al valore di f corrispondente al medesimo suolo; e come dicemmo altra volta rispetto ai cilindri, ne formeremo il prodotto con la pressione, e divideremo per la radice quadrata del raggio: ciò nel sup-

posto però che la larghezza dei cerchj delle ruote sia eguale o pressochè eguale alla larghezza di quelli da noi usati.

I risultati sperimentali, che abbiamo riportati nelle due tavole V. parte prima, VII. parte seconda, non sono estesi per quel conveniente numero di sostanze, che può richiedersi per il vantaggio della pratica. Quindi serviranno a render meno incomplete le nozioni, che fino al presente si hanno sul coefficiente d'attrito al rotolamento ed a farci giusta idea del credito che si ha a dare agli esperimenti di già eseguiti su questo soggetto. D'ordinario si trova nei libri di Meccanica pratica una tavola che il Poncelet ha compilata (Introduction a la Mecanique Industrielle p. 507) dietro alcune esperienze dirette, e dietro alcune deduzioni di ragionamento fatto sopra dei risultati sperimentali. Il confronto fra i numeri da noi riferiti, e quelli registrati in questa tavola di Poncelet non fa conoscere sì marcata differenza da non dovere negli usi pratici valerci anche di quei numeri. Dobbiamo anche ricordare che i nostri risultati sulle ruote da barroccio concordano con quelli ottenuti da Dupit, onde per il lato relativo al moto delle vetture possiede ancora la pratica i risultati del Dupit medesimo.

Determinate per mezzo di soli dati sperimentali le leggi, che regolano la resistenza d'attrito, mostreremo, come un semplicissimo ragionamento geometrico porta alle medesime deduzioni.



Abbiasi un cilindro di raggio $r=CA=FP$ posato sopra un piano orizzontale, e voglia farsi rotolare per l'azione di una forza, che chiameremo F , la più piccola possibile, applicata in direzione verticale, e tangenzialmente alla super-

ficie convessa del cilindro. Si tratta di stabilire l'espressione di quella forza F che è incognita, in funzione del raggio, della pressione che esercita il cilindro sul piano, e dello stato delle superfici. Si potrà considerare il cilindro come un corpo materiale omogeneo ed animato da forze tali, che la loro risultante esprime la pressione sul piano e che noi chiameremo P , passi per l'asse del cilindro normalmente al piano medesimo. Riflettendo che tutti i corpi sono più o meno scabri nelle loro superficie, supporremo, che tanto sul piano quanto sulla superficie cilindrica siano sparsi dei semi-globetti o dentelli, affine di aver così il mezzo d'introdurre nella espressione da determinarsi lo stato delle superfici. Sia in M il semi-globulo, intorno a cui si fa la rotazione; rappresenteremo con m la sua lunghezza MO : e la sua distanza dalla verticale che passa pel centro sarà molto piccola, perchè si tratta di un semplice contatto fra le due superficie. Siano inoltre indicate con x y le lunghezze $AB=MP$, $BM=AP$. Applicando in F una forza F , la più grande possibile, che lasci il sistema in equilibrio, essendo in O l'asse di rotazione, essa agirà con un braccio di leva eguale a $FP-OA$, ovvero con $FP-PM$, perchè OB è trascurabile, mentrèchè l'altra forza P agirà con un braccio eguale ad OA , o ad MP ; onde attese le sopraccennate denominazioni l'equazione dello stato prossimo al moto sarà (1) $F(r-x)=Px$. Ora per la proprietà caratteristica del circolo sarà (2) $x^2=y(2r-y)$: ma i triangoli simili MOB , CMP danno $y:m::r-y:r$ onde $y = \frac{mr}{r+m}$: e l'equazione (2) risolta rispetto ad x , per la sostituzione di questo valore di y diviene, dopo aver fatte le opportune semplicizzazioni, $x = \frac{r}{r+m} \sqrt{m(2r+m)}$: onde finalmente il valor di F tratto dalla (1) e ridotto convenientemente dopo avervi

sostituito quello di x , sarà dato da $F = \frac{PV\sqrt{m(2r+m)}}{r+m-\sqrt{m(2r+m)}}$.

A questa formula converrà intendere aggiunta una piccola quantità, che ponga in movimento lento e continuato il sistema. Tale aumento però non potendo essere che trascurabile per la sua piccolezza, potremo anche ritenere la formula, come si è scritta; che anzi, se si rifletta, che si può impunemente trascurare la seconda potenza di m , ed m stessa in faccia di r , essa si presenterà più semplice sotto quest'aspetto (3) $F = \frac{PV\sqrt{2m}}{\sqrt{r}}$; nella quale si leg-

ge, che la forza atta a mettere il cilindro in procinto di muoversi, è molto piccola rispetto alla pressione, in ragion diretta della pressione stessa, ed inversa della radice quadrata del raggio; che sono le leggi già stabilite coi risultati d'esperienza.

Quando piaccia applicare la formula (3) per determinare l'insinuazione delle piccole prominente delle superfici cilindriche nelle piccole cavità delle piane, ricavando il valore di m , otterremo questa altra espressione

$$m = \frac{r}{2} \left(\frac{F}{P} \right)^2. \text{ E siccome dal confronto della formula (3)}$$

con quella già data nelle prima parte si ricava essere $f = \sqrt{2m}$ per non rifare i calcoli potremo alla determinazione di m servirci del coefficiente f d'attrito già per al-

cune sostanze determinato, ed avremo $m = \frac{f^2}{2}$. Un tal me-

todo usato per determinare le differenze fra la grana e compattezza delle diverse pietre, o dei diversi metalli, ci sembra che si presti meglio di qualunque altro per ridurre in numeri questi elementi. Faticosa e dispendiosa è la conveniente preparazione che si dovrebbe dare ai corpi per avere cilindri esatti, e lastre bene spianate: ma quando fosse anche per un sol corpo determinato con preci-

sione il valore di m , da potersi ritenere per la grossezza della grana, facile sarà anche con altri metodi men dispendiosi avere il rapporto fra la grossezza della grana di quel corpo e quella degli altri. Potrebbe darlo ancora l'attrito di prima specie, pel quale non occorrono, che piccole lastrette spianate. Avuto una volta il rapporto che deve passare fra i diversi valori di m nei differenti corpi, è chiaro come conoscendo il valore assoluto di m relativo ad un solo di essi corpi, possa dedursi il valore assoluto per tutti gli altri.

Questo valor di m in alcune ricerche può comparire interessante. Vogliasi a cagion d'esempio determinare la differenza fra la scabrosità dei legni, e quella dei metalli, quando gli uni e gli altri sieno con egual cura levigati quanto può farli il bulino del tornio. Useremo i valori di f che abbiamo riportato per tali corpi nella tavola V. della prima parte del nostro lavoro, ed otterremo

Per i metalli $m = 0m,0000000103$

Per i legni $m = 0m,0000011735$

Prima di terminare diremo alcune parole sui curri che ci offrono un semplice esempio d'applicazione dei principj già stabiliti.

Attesa la gran differenza che passa fra il valore dell'attrito di prima specie, e quello di seconda, agevolmente si comprende quanto grande sia il vantaggio, che presenta l'uso dei curri nel traslocare pesi molto intensi. Volendo prendere a determinare la forza necessaria a muovere lentamente un sistema di questo genere, cominceremo da avvertire, che i cilindri devono essere collocati con gli assi paralleli, e che gli supporremo tutti del medesimo diametro, come si usa nella pratica, disposti a distanze arbitrarie fra loro venendo in tal guisa in generale a sostenere parti disuguali del carico loro sovrappo-

sto. Nel considerare questo sistema vi si rinven-
 gono sempre due attriti: l'uno si genera fra le superfici convesse
 dei cilindri e il piano superiore appartenente alla massa
 del carico quando abbia una faccia piana, o in caso di-
 verso a tavole destinate a sostenerlo: l'altro si produce
 fra il piano inferiore, su cui scorrono i curri, e le loro
 medesime superfici. Noi prenderemo la forza che deve
 dar moto lento al sistema con una direzione giacente sul-
 la superficie piana, che sta a contatto colla parte supe-
 riore dei curri, e normale ai loro assi. Se ora suppo-
 niamo di considerare un solo cilindro, e prescindiamo dal
 suo peso, il valor dell'attrito superiore dovrà essere
 eguale a quello dell'inferiore, perchè mentre esso roto-
 la intorno al punto di contatto col piano di sopra, la for-
 za che produce questo rotolamento proviene dall'attacco,
 o resistenza, che ha il cilindro col piano inferiore; onde
 risulta che la forza destinata a muovere il sistema, agi-
 sce con un braccio di leva eguale al diametro per ambe-
 due gli attriti. Premesso ciò, potremo considerare que-
 sta forza, che indicheremo con F , come decomposta in
 tante altre forze coincidenti e cospiranti in modo che a
 ciascun cilindro ne corrisponda una capace di muoverlo
 indipendentemente dalle altre. Dette C, C', C'' ec. queste
 componenti, e $p, p', p'' \dots$ le porzioni di carico che toc-
 ca a sostenere ai diversi cilindri, variabili ad ogni istan-
 te quando il sistema è in moto, avremo le due equazio-
 ni $F = C + C' + C'' + \text{ec.}$ (1) $P = p + p' + p'' + \text{ec.}$ in-
 dicando con P il peso totale. Se ora si rappresenta con
 k il peso di ciaschedun curro, il valore della componen-
 te C verrà dato dalla somma delle due parti $\frac{p\sqrt{2m}}{2\sqrt{r}}$, e
 $\frac{(p+k)\sqrt{2m}}{2\sqrt{r}}$ necessarie a vincere con un braccio di leva
 eguale al diametro rispettivamente gli attriti superiore, ed
 inferiore del cilindro, per l'ultimo dei quali la pressione

resulta eguale a $p+k$ a causa del peso del cilindro: avremo perciò $C = \left(p + \frac{k}{2} \right) \frac{\sqrt{2m}}{\sqrt{r}}$. Analoghe equazioni si ot-

terranno pure per gli altri cilindri, cioè

$$C' = \left(p' + \frac{k}{2} \right) \frac{\sqrt{2m}}{\sqrt{r}}, C'' = \left(p'' + \frac{k}{2} \right) \frac{\sqrt{2m}}{\sqrt{r}} \text{ ec.}$$

Se ora indichiamo con n il numero dei curri, e sommiamo fra loro tutti i primi membri di queste equazioni, come pure fra loro tutti i secondi, attese le due equazio-

ni (1) verrà $F = \left(p + \frac{3p}{2} \right) \frac{\sqrt{2m}}{\sqrt{r}}$. In pratica i curri soglio-

no essere ordinariamente in numero di tre, onde F si riduce

$$F = \left(p + \frac{3p}{2} \right) \frac{\sqrt{2m}}{\sqrt{r}} : \text{ e quando } p \text{ fosse piccolo tanto da}$$

trascurarsi il termine $\frac{3p}{2}$ otterremo, $F = p \frac{\sqrt{2m}}{\sqrt{r}}$, onde si

deduce che in questo ultimo caso, lo sforzo necessario a mettere in movimento i curri nella disposizione in cui gli abbiamo supposti deve essere lo stesso di quello che occorreva a far rotolare un cilindro nella disposizione che gli si era data nella prima parte di questo lavoro. Ciò evidentemente succede, perchè dovendo esser doppia la resistenza per essere due gli attriti, e nell'istesso tempo essendo pur doppio il braccio di leva, fa d'uopo per la teoria dei momenti, che essa rimanga della medesima intensità.

La verità di questo principio si è pur manifestata da un'esperienza fatta coll'apparecchio seguente. Posti due cilindri d'abeto del medesimo raggio ed eguale a 0m,0620 sopra due regoli parimente d'abete, e con gli assi paralleli, abbiamo fissato un cordoncino con una delle sue estremità sulla superficie di uno di essi, glielo abbiamo avvolto intorno per uno o due giri: e procurando che lasciasse l'a-

derenza con la superficie cilindrica all'estremo superiore del diametro verticale, in egual modo lo abbiamo avvolto al secondo cilindro. Facendogli quindi attraversare una carrucolina mobilissima, collocata a qualche distanza dai cilindri in modo che il cordoncino venisse a trovarsi orizzontale e perpendicolare agli assi dei cilindri medesimi, abbiamo ridotto così la direzione del cordoncino ad essere verticale: e abbiamo appeso all'altra estremità un piattello ad oggetto di poter misurare con successivi pesetti l'intensità della resistenza. Sono stati posati sopra i cilindri due regoli del medesimo legno, e con faccie della medesima larghezza dei sottoposti, connessi superiormente fra loro mediante una tavola, la quale veniva destinata a sostenere un peso determinato. Sotto la pressione di 8 kilogrammi, compreso il peso della tavola e quello dei regoli, abbiamo trovato la forza necessaria a muovere il sistema essere eguale a $0k,0262$. Tolta dipoi la tavola coi regoli superiori, abbiamo addossato a ciaschedun cilindro un altro cordoncino, alle cui estremità si sono attaccati da ciascuna parte 2 kilogrammi; e ricondotti i cilindri ad avere i medesimi punti di contatto del caso precedente, abbiamo nuovamente osservato qual'era il peso atto a muovere il sistema. In questo secondo esperimento si è trovato che succedeva il moto allorchè il pesetto eguagliava $0k,0122$, numero circa la metà del precedente. Dunque siccome i punti di contatto inferiore, erano i medesimi in ambedue i casi, e siccome eguale era pure la pressione, che i cilindri esercitavano sul piano sottoposto, siamo condotti al principio sopra esposto. Chiaramente ancora si scorge, che la disposizione più vantaggiosa della direzione della forza è quella di passare pel centro di gravità della massa del carico: infatti in caso diverso tendendo la forza a produrre un moto rotatorio, una parte di essa vien distrutta da quegli ostacoli, che si oppongono a questa rotazione; ma

il divario è stato riscontrato non essere molto grande almeno sotto le pressioni, con le quali abbiamo fatto le nostre esperienze. Questo può essere il motivo per cui il primo numero è risultato un poco più grande del doppio del secondo. Si deve avvertire che in queste esperienze si ottiene un moto regolarissimo a differenza di quelle eseguite coll' apparecchio descritto nella prima parte. Per intendere da che provenga questa uniformità di movimento, fa d'uopo riflettere che nelle esperienze della prima parte l'unica linea di contatto corrispondendo a una pressione più grande di quella cui si ritrova soggetta una qualunque delle linee di contatto nelle esperienze attuali, se il cilindro incontrava un punto difficile a superarsi, l'ostacolo avrebbe prodotto maggiore effetto in aumentare il peso che deve vincere l'attrito: mentrechè per queste ultime esperienze allorquando una linea s' imbatte in un punto arduo, in generale non accade, che le altre soccombano pure al medesimo incontro: onde risulta che la forza, aiutando per così dire, ora l'una, ora l'altra linea, il moto non resta interrotto. Di qui ne nasce ancora la spiegazione del gran divario, che esiste fra il numero 0k,0262 e quelli della tavola I. della prima parte corrispondenti al medesimo raggio di 0m,0620. Avvertiremo ancora, che i numeri 0k,0262, e 0k,0122 non sono valori medii di più esperienze, giacchè abbiamo creduto inutile farne un maggior numero, mentre non può cadere in dubbio che la relazione fra loro esistente, dipenda da circostanze accessorie, poichè abbiamo ritenuto in ambedue l'esperienze la medesima pressione, le stesse linee dei cilindri e nei medesimi luoghi delle superfici dei regoli.

ENRICO GALLI